11 - Дәріс

Тақырыбы: **Сандық қатар және оның жинақталуы. Теріс емес мүшелі қатарлардың жинақталуының белгілері.**

§1. Сандық қатарлар және оларға амалдар қолдану

$k = 0,1,2,\dots$ индекстеріне тәуелді u_k - сандарынан құралған

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots \tag{1}$$

өрнегі **сандық қатар** деп аталады.

(1) - қатарды

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{0}^{\infty} u_k \tag{2}$$

деп те жазады.

$S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1, \dots,$ $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, $n = 0,1,\dots$ сандары (1) (немесе (2)) қатардың **дербес қосындылары** деп аталады.

Анықтама бойынша, егер $\{S_n\}$ - сандық тізбегінің $n \to \infty$ нақты мәнді шегі бар:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

болса, онда (1) (немесе (2)) **қатар жинақты** деп аталады. Бұл жағдайда

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = S \tag{3}$$

деп жазады да S - санын **қатардың қосындысы** деп атайды.

Коши критериіі бойынша: (1) қатар жинақты болуы үшін әрбір $\varepsilon > 0$ саны бойынша барлық $n > N$ натурал сандары және кез келген p - натурал саны үшін

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}\right| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалатындай N табылуы қажетті және жеткілікті.

Дербес жағдайда, $p = 1$ деп алсақ, онда (1) - қатардың жинақты болуынан оның жалпы мүшесі нөлге ұмтылатыны:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{4}$$

шығады.

(4) - шарт қатардың жинақтылығының **қажетті шарты,** бірақ ол жеткілікті шарт бола алмайды.

Мәселен, **гармониялық қатар** деп аталатын

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

қатарының жинақсыз болатынын кейінірек көрсетеміз, алайда, бұл қатар үшін (4) - шарт орындалады:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 .$$

Сонымен, (4) - шарт орындалса, қатардың жинақты не жинақсыз болуы туралы ешнәрсе айта алмаймыз, бірақ **егер берілген қатар үшін (4) - шарт орындалмаса, онда ол қатардың жинақсыз** болатыны түсінікті.

Келесі қатарды қарастырайық:

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+k} . \qquad (5)$$

(1) мен (5) қатарлардың жинақталуының Коши шарты бірдей тұжырымдалатындықтан, олар бір мезгілде екеуі бірдей жинақталады немесе екеуі бірдей жинақталмайды.

Егер олар жинақталса, онда (5) - қатар қосындысы

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}u_{n+k}=\lim_{m\to\infty}\left(S_{n+m}-S_n\right)=S-S_n$$

тең. (5) - қатар **(1) - қатардың қалдығы** немесе **қалдық мүшесі** деп аталады.

$\sum_{n=m}^{\infty}u_n$ орнына, қысқаша $\sum_{n}u_n$ немесе одан да қысқа $\sum u_n$ деп жазады.

Егер (1) - қатардың мүшелері **теріс емес** сандар болса, онда оның дербес қосындылары кемімейтін тізбек құрайды:

$$S_1\le S_2\le S_3\le\ldots,$$

сондықтан, бұл тізбек шенелген болса: $S_n\le M,\ n=1,2,\ldots$, онда (1) - қатар жинақты және

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S\le M ,$$

ал егер ол тізбек шенелмеген болса, онда

$$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty ,$$

яғни, қатар жинақсыз болады. Бұл жағдайда

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\infty$$

деп жазады.

Қатарларға амалдар қолдану. Егер $\sum_{0}^{\infty}u_k$ және $\sum_{0}^{\infty}\vartheta_k$ жинақталатын қатарлар, α - сан болса, онда $\sum_{0}^{\infty}\alpha u_k$, $\sum_{0}^{\infty}\left(u_k\pm\vartheta_k\right)$ **қатарлары да жинақталады** және

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha u_k = \alpha \sum_{0}^{\infty} u_k \ , \tag{6}$$

$$\sum_{0}^{\infty} (u_k \pm \vartheta_k) = \sum_{0}^{\infty} u_k \pm \sum_{0}^{\infty} \vartheta_k \ . \tag{7}$$

Теріс емес мүшелі қатарлар

Қатарлардың жинақталуының кейбір белгілері

1 - теорема (қатарларды салыстыру белгісі). Мүшелері теріс емес

$$1)\ \sum_{0}^{\infty} u_k\ ,\quad 2)\ \sum_{0}^{\infty} \vartheta_k$$

қатарлары берілсін.

а) Егер $u_k \le \vartheta_k$, $k = 0,1,2,\ldots$,

онда 2) қатардың жинақтылығынан 1) қатардың жинақтылығы, ал

1) қатардың жинақсыздығынан 2) қатардың жинақсыздығы шығады.

б) Егер

$$\lim_{k \to \infty} \frac{u_k}{\vartheta_k} = A > 0\ , \tag{1}$$

онда 1) мен 2) қатарлары бір мезгілде екеуі де жинақталады немесе екеуі де жинақталмайды.

2 - теорема (Даламбер белгісі). Оң мүшелі

$$\sum_{0}^{\infty} u_k \tag{2}$$

қатары беріліп,

$\lim \frac{u_{k+1}}{u_k} = q$ (3) шегі бар болсын

Онда (2) қатар $q < 1$ болса жинақты, $q > 1$ болса жинақсыз.

3 - теорема (Коши белгісі) Оң мүшелі (2) қатар беріліп, $\lim \sqrt[k]{u_k = q}$ (4) шегі бар болсын

онда (2) - қатар $q < 1$ болса жинақты, $q > 1$ болса жинақсыз.

Ескерту. Даламбер және Коши белгілері

$\lim\limits_{k \to \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1$, $\quad \lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{u_k} = 1$, яғни $q = 1$ болса жарамсыз. Бұл жағдайда қатар жинақты да жинақсыз да бола береді. Осы мағынада бұл екі белгіге қарағанда салыстыру немесе келесі интегралдық белгісі өте “сезімтал”.

3 - теорема. Егер $f(x)$ функциясы $[1, \infty]$ аралығында **теріс емес, үзіліссіз** және **өспейтін** болса, онда

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \qquad (5)$$

меншіксіз интегралы және

$$\sum_1^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots \qquad (6)$$

(6) қатары бір мезгілде жинақты немесе бір мезгілде жинақсыз болады.

Лейбниц қатары. Абсолютті жинақты және шартты жинақты қатарлар

Егер a_k сандары оң: $a_k > 0$, $k = 0,1,2,\dots$, ол сандар монотонды өспейтін тізбек құраса: $a_k \geq a_{k+1}$ және $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ болса, онда

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \qquad (1)$$

қатарын, **Лейбниц қатары** деп атайды.

Теорема. Лейбниц қатары жинақты және оның қосындысы

$$S \leq a_0$$

Егер қатардың мүшелері кез келген таңбалы нақты сандар болса, онда ол қатар **таңба айнымалы** деп аталады.

Егер қатардың кез келген екі көрші мүшелерінің таңбалары әр түрлі болса, онда оны **таңба ауыспалы қатар** дейді. Мысалы, Лейбниц қатары таңбааусыпалы қатар.

Таңба ауыспалы қатар таңба айнымалы қатардың дербес жағдайы, ал өз кезегінде таңба айнымалы қатар мүшелері комплекс сандар болатын қатарлардың дербес жағдайы.

Егер (3) қатар жинақты болса, онда (2) - қатар **абсолютті (дәйекті) жинақты қатар** деп аталады.